Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2010.

Второй тур. Лига стратегий

1. Множество S вершин графа называется *доминирующим*, если любая вершина графа, не входящая в S, смежна с какой-то вершиной из S. Существует ли граф с четным числом доминирующих множеств?

2. Точка M — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка D — основание высоты из вершины B. Из точки M опустили перпендикуляры MX и MY на стороны AB и AC соответственно. Точку D отразили симметрично относительно прямой XY и получили точку D'. Докажите, что точка D' лежит на прямой BM.

3. Даны положительные числа a_0, a_1, $\ldots$, a_n такие, что $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажите неравенство
$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 - a_0}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$

4. Дано множество натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что количество таких пар (i, j), что $a_i - a_j$ — степень двойки не превосходит количества таких пар (i, j), что $i - j$ — степень двойки.

5. Докажите, что для любого натурального числа $k > 1$ существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы k-той степени натурального числа и простого числа.

6. Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_{n+1} = a_n^2 + 5a_n + 1$ при $n > 0$. Могут ли все члены такой последовательности быть составными?

7. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоит 0 или 1. Рассмотрим все $n!$ таблиц, получающихся перестановкой строк, и для каждой выпишем ее главную диагональ, начиная с нижнего левого угла. Какое наибольшее количество различных диагоналей может оказаться выписанными?

8. В 10 коробках лежат камни: в k-ой коробке лежит $2000 + k$ камней ($k = 1$, $2, \ldots, 10$). Двое играют в такую игру: один из игроков выбирает любые 5 коробок и вынимает из каждой из них некоторое ненулевое количество камней. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

9. Дано вещественное число $t \geqslant 3$ и многочлен $p(x)$ такой, что $|p(k) - t^k| < 1$ при всех целых неотрицательных k не превосходящих данного натурального числа n. Докажите, что степень многочлена $p(x)$ не меньше n.

10. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O соответственно. Точка X — точка пересечения касательных в точках K и M к описанной окружности треугольника KOM. Точка Y — точка пересечения касательных в точках L и N к описанной окружности треугольника LON. Докажите, что прямая XY проходит через точку O.